2. VARGJET NUMERIKE

Detyra për ushtrime – PJESA 4

1. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}}$.
2. Të tregohet se vargu $x_n=\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^n n}{n}$ nuk konvergjon.
3. Le të jenë $a_1,a_2,\ldots,a_k$ numra realë jonegativë. Të vërtetohet se
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}.$$
4. Të vërtetohet se vargu monoton që ka një nënvarg konvergjent është konvergjent.
5. Le të jetë (x_n) varg konvergjent, kurse (y_n) varg divergjent. A konvergjojnë vargjet:

   a) (x_n+y_n); b) $(x_n\cdot y_n)$.
6. Le të jetë (x_n) varg termat e së cilit në formë decimale paraqiten si vijon:
$$x_1=0.\alpha_1,\,x_2=0.\alpha_1\alpha_2,\ldots.,\,x_n=0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$$
   Tregoni se vargu (x_n) konvergjon.
7. Nëse vargjet $(x_{2k}),(x_{2k+1})$ dhe (x_{7k}) të vargut (x_n) konvergjojnë, tregoni se edhe vargu (x_n) konvergjon.

Të njehsohet limiti i vargjeve:

8. $u_1=a>0,u_2=\sin u_1,u_3=\sin u_2\ldots,u_{n+1}=\sin u_n,\ldots.$.
9. $u_1=a>0,u_2=\ln u_{1+1},u_3=\ln u_3\ldots,u_{n+1}=\ln u_{n+1},\ldots.$
10. $u_1=\sqrt{2},u_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ldots,u_n=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}},\ldots$

Në bazë të teoremës mbi limitin e tri vargjeve të shqyrtohet konvergjenca e vargjeve

11. $x_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$.
12. $y_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$.
13. $x_n=\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n^2}$.

Njehsoni limitet:

14. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. 15. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n, \alpha\in\mathbb{R}$. 16. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

Të njehsohen limitet:

17. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. 18. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+10}$. 19. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$.

20. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$. 21. $\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n))$.

22. Duke ditur se $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ vërtetoni se

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

23. Është dhënë vargu $u_0=-\ln 4, u_n=\ln\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+4)}, n=1,2,...$

Nëse $S_n = n(u_0+u_1+...+u_n)$ të njehsohet $\lim_{n\to\infty} S_n$.

24. Të njehsohet $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+....+\frac{a_n}{a_1}\right)$ ku (a_n) është varg i çfarëdoshëm me anëtarë pozitiv.

25. Të shqyrtohet konvergjenca e vargut $\left\{\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},...,\frac{1}{2n}\right\}$.

26. Të tregohet se vargu $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+...+\frac{1}{3^n+n}$ konvergjon.

27. Njehsoni $\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot...\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

28. Nëse $\{a_n\}, n=0,1,2,...$ është varg monotono rritës, të njehsohet

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_1}{a_0\cdot S_1}+\frac{a_2}{S_1\cdot S_2}+\frac{a_3}{S_2\cdot S_3}+...+\frac{a_n}{S_{n-1}\cdot S_n}\right\},$$ ku $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$.

29. Të tregohet se vargu $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ është konvergjent.

30. Të tregohet se vargu $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ është konvergjent.

31. Nëse ekziston $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i fundëm ose i pafundëm, atëherë
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, n \in \mathbb{N}.$

32. Nëse ekziston $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i fundëm ose i pafundëm, atëherë

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n, n \in \mathbb{N}, a_n > 0.$$

33. Nëse $a_n \le a_{n+2}, n = 1, 2, ...$ atëherë kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që vargu (a_n) të konvergjojë është kufizueshmëria nga lartë dhe $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0.$

34. Le të jetë dhënë vargu $x_n > 0.$ Të vërtetohet implikacioni

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{x_{n+1}}{x_n} \le q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

35. Nëse ekziston $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dhe nëse $a_n > 0$ tregoni se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$

36. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{1 + x + x^2 + ... + x^{2n}}, x \in \mathbb{R}.$

Të njehsohen limitet:

37. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + ... + \sqrt[n]{n}}{n}.$ 38. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p}{n^{p+1}}, (p > -1).$

39. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$

40. Në bazë të kriterit të Bolcano-Koshit të vërtetohet se vargjet

a) $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + ... + \frac{\cos n!}{n \cdot (n-1)}$

b) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

konvergjojnë.

41. Në bazë të kriterit të Bolcano Koshit të vërtetohet se vargu

$$x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}, n = 2, 3, \ldots$$

divergjon.

42. Të tregohet se vargu $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ divergjon.

43. Vargu numerik (x_n) është dhënë me formulën

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, n = 3, 4, \ldots$$

Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

44. Le të jetë dhënë vargu (a_n) me formulën $(2 - a_n) \cdot a_{n+1} = 1, 0 < a_0 < 1$. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

45. Vargu (y_n) është përkufizuar me formulën

$$y_1 = x, y_{n+1} = 1 + \sqrt{y_n - 1}, x > 2, n = 1, 2, \ldots$$

Tregoni se (y_n) konvergjon dhe njehsoni $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

46. Vargu (x_n) është dhënë si vijon:

$$x_1 = x, 0 < x < 2, x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, n \in \mathbb{N}.$$

Tregoni se (x_n) është konvergjent dhe njehsoni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

47. Të shqyrtohet konvergjenca e vargut $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i dhënë me

$$x_1 = a, a \in \left[0, \frac{1}{4}\right], x_{n+1} = a + x_n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$$

48. Janë dhënë numrat $a, b > 0$ dhe vargjet $(a_n), (b_n)$ me anë të formulave

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, a_0 = a, b_0 = b.$$

Vërtetoni se:

a) $a_n b_n = ab$;

b) $\frac{a_n - \sqrt{a_n b_n}}{a_n + \sqrt{a_n b_n}} = \left(\frac{a - \sqrt{ab}}{a + \sqrt{ab}}\right)$;

c) Njehsoni $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dhe $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

49. Vargu (x_n) është dhënë me formulën $x_0 = 1, x_n = \dfrac{1}{1+x_{n-1}}$. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

50. Është dhënë vargu (x_n) me formulën

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), a > 0, n = 1, 2, \ldots$$

Të tregohet se vargu (x_n) konvergjon dhe njehsoni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

51. Të shqyrtohet konvergjenca e vargut (b_n) të dhënë me:

$$b_1 = a, b_2 = b, b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \ldots, a, b \in \mathbb{R}.$$

52. Të shqyrtohet konvergjenca e vargut (x_n) të dhënë me $x_n = \cos 3^n a, a \in \mathbb{R}$.

53. Tregoni se $3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}}}}$.

54. Vargu (c_n) është dhënë me formulën $c_n = \dfrac{(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1)}{n}, n \in \mathbb{N}$

ku $(a_n), (b_n)$ janë vargje të dhëna.

Tregoni se:

a) Nëse (a_n) është varg zero dhe (b_n) është i kufizuar atëherë (c_n) është varg zero.

b) Nëse $a_n \to a, b_n \to b,$ kur $n \to \infty$ atëherë $c_n \to ab, n \to \infty$.

55. Është dhënë vargu (x_n) me formulat rekurente

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right), n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, a > 0.$$

Tregoni se (x_n) konvergjon dhe të caktohet limit i tij.

56. Tregoni se vargu (a_n) i dhënë me formulën:

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_{n+2} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}, n = 1, 2, \ldots$$

është konvergjent.